JUMP PROBLEM ON AN ARC FOR $\beta$-ANALYTIC FUNCTIONS

B.A. Kats, S.R. Mironova, A.Yu. Pogodina

*We consider the jump boundary problem on a Jordan arc for $\beta$-analytic functions.*

Keywords: Beltrami equation, jump problem, $\beta$-analytic functions.

УДК 517.544

# ПОКАЗАТЕЛИ МАРЦИНКЕВИЧА И ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ $\beta$-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д.Б. Кац[1]

1 *katzdavid89@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В данной работе мы изучаем задачу о скачке и некоторые решения уравнения Бельтрами. Как задача о скачке, так и уравнения Бельтрами имеют многочисленные приложения в физике и механике. Они изученые для случаев аналитических (т.е. 0-аналитических) функций и спрямляемых контуров. Мы обсуждаем эти вопросы для случаев $\beta$-аналитических функций и неспрямляемых кривых. Расширяя известную технику решения данных задач на такие случаи, мы получаем неизвестные ранее результаты.*

**Ключевые слова**: фракталы, фрактал, показатели Марцинкевича, метрические характеристики, неспрямляемые кривые.

Одним из крайне востребованных в механике и физике обобщений уравнений Коши–Римана (см., напр., [1]) является уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1$$

Здесь, как обычно,

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

В случае

$$\mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \le \beta < 1$$

правый обратный оператор для дифференциального оператора Бельтрами $\overline{\partial} - \mu\partial$ (аналог известного оператора $T$ из [1]) был в явном виде найден казахским математиком А. Тунгатаровым [3]. Решения соответствующего уравнения Бельтрами получили название $\beta$−аналитических функций.

В наши дни исследования аналогов краевой задачи Римана и связанных с ними вопросов для таких функций получили дальнейшее развитие в работах таких математиков, как Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье (см. [4], [6]).

Для аналитических (т. е. 0-аналитических) функций краевая задача Римана хорошо изучена в следующей постановке: Пусть Γ есть ориентированная кривая на комплексной плоскости, на которой заданы функции $G(t)$ и $g(t)$. Требуется найти все голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\phi(z)$, имеющие на $\Gamma$ непрерывные предельные значения $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ слева и справа соответственно, исчезающие в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющие краевому условию

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Классические результаты в этой области [7] получены для случая кусочно-гладкого контура. На неспрямляемых контурах задача Римана для аналитических функций была решена Б.А. Кацем [9]. Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье использовали предложенные в этих работах методы для решения задачи Римана и задачи о скачке для $\beta$-аналитических функций на неспрямляемых кривых. Ими получены следующие условия разрешимости таких задач.

Пусть $\Gamma$ – множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \le 1$. Класс $H_\nu(\Gamma)$ состоит из заданных на $\Gamma$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t) - f(t')|}{|t - t'|^\nu} : t, t' \in \Gamma, t \ne t'\right\} < \infty$$

Если множество $\Gamma$ компактно, то его размерность Минковского [10], определяется равенством

$$\operatorname{dm}\Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N(\Gamma;\varepsilon)}{-\log\varepsilon},$$

где $N(\Gamma;\varepsilon)$ означает наименьшее число кругов радиуса $\varepsilon$, образующих покрытие $\Gamma$. Такая размерность плоского континуума всегда лежит в промежутке $[1;2]$; если $\Gamma$ – спрямляемая кривая, то $\operatorname{dm}\Gamma = 1$, а для неспрямляемой кривой размерность Минковского может превосходить единицу.

В работе [5] доказано, что задача о скачке (частный случай задачи Римана с $G \equiv 1$) для $\beta$–аналитических функций на неспрямляемом контуре $\Gamma$ разрешима, если $g \in H_\nu(\Gamma)$, причём

$$\nu > \frac{1}{2}\operatorname{dm}\Gamma. \tag{1}$$

Далее, в [6] разрешимость задачи Римана для $\beta$–аналитических функций на неспрямляемом контуре $\Gamma$ установлена в предположении, что контур является $d$-суммируемым, а коэффициенты задачи $G$ и $g$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем

$$\nu > d/2. \tag{2}$$

Понятие $d$-суммируемости введено Дж. Харрисон и А. Нортоном [11]; контур $\Gamma$ называется $d$-суммируемым, если сходится интеграл

$$\int\limits_0 N(\Gamma;x)x^{d-1}dx.$$

Как показано в [11], $d$-суммируемость $\Gamma$ влечет неравенство $\operatorname{dm}\Gamma \le d$, а при $\operatorname{dm}\Gamma < d$ множество $\Gamma$ является $d$-суммируемым.

Недавно автор [12], [13] ввел новую метрическую характеристику неспрямляемых кривых — показатель Марцинкевича. Цель данного доклада — показать, что эта характеристика позволяет ослабить условия 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан, грант № 17-41-160345

## Литература

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические фукции*. – М.: Наука, 1988.

2. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*. – Новосибирск: Наука, 1977.

3. Тунгатаров А.Б. *Свойства одного интегрального оператора в классах суммируемых функций* // Известия АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1985. – Т. 132. – № 5. – С. 58–62.

4. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D. *On the jump problem for $\beta$–analytic functions* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2006. – V. 51. – № 8–11. – P. 763–775.

5. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Vilaire J.-M. *A jump problem for $\beta$-analytic functions in domains with fractal boundaries* // Revista Matematica Complutense. – 2010. – V. 23. – P. 105–111.

6. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Vilaire J.-M. *The Riemann boundary value problem for $\beta$-analytic functions over $D$-summable closed curves* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – V. 75. – № 4. – P. 441–453.

7. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

8. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1962.

9. Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Известия ВУЗов. Математика. – 1984. – № 3. – С. 68–80.

10. Falconer K.J. *Fractal geometry*. – UK: Wiley and Sons, Chichester, 3rd edition, 2014.

11. Harrison J., Norton A. *The Gauss-Green theorem for fractal boundaries* // Duke Mathematical Journal. – 1992. – № 67. – P. 575–588.

12. Кац Д.Б. *Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах* // Известия ВУЗов. Математика. – 2014. – № 3. – С. 68–71.

13. Кац Д.Б. *Локальные показатели Марцинкевича и их приложение* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — Т. 156, кн. 4. — С. 31–38.

MARCINKIEWICZ EXPONENTS AND THE JUMP PROBLEM FOR $\beta$-ANALYTIC FUNCTIONS

D.B. Katz

*In this paper we study the jump problem and some certain solutions of Beltrami equation $\bar\partial\phi = \mu\partial\phi$. The jump problem and Beltrami equation both have a lot of applications in physics and mechanics. They are already studied in previous papers for analytic (i.e. $0$-analytic) functions. Now we shall study same problems on $\beta$-analytic functions. We shall expand our technic onto those functions and obtain new results in this field.*

Keywords: fractal, Marcinkiewicz exponents, metric characteristics, non-rectifiable curves.